UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 930 B

Nombre: ______________________

Carnet: ____________ Sección: ______

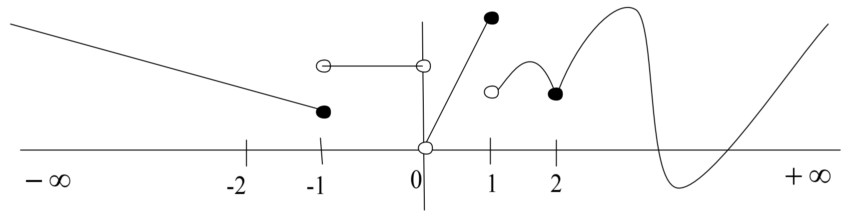
JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1.

a) Sean f y g dos funciones tales que:
$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$ $\quad y \quad$ $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=-3$
Hallar $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)g(x)}{f(x)+1}$, indicando las propiedades utilizadas.

b) Definir formalmente $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=L$

c) Indicar los intervalos de continuidad, según la gráfica indicada a continuación



(1 Pto c/u)

d) Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2(x)}{x}$

e) Sabiendo que $|f(x)|<(x-3)^2$, para $x\neq 3$.
Hallar $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

2. Hallar los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1}{\tan(x)}$ (3 Ptos)	b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{sen(2-x)\sqrt{(2-x)^2}}{2-x}$ (3 Ptos)
c) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(h-2)^3-8}{h}$ (4 Ptos)	d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4x}}{-4x-1}$ (4 Ptos)

3. Dada la función g definida por: $g(x)=\begin{cases} x+b & si \quad x<2 \\ x^2-3x+1 & si \quad 2\le x<4 \\ \dfrac{x+1-a}{x-2} & si \quad x\ge 4 \end{cases}$ (6 Ptos)

Hallar los valores de a y b para que g sea continua en todo $\mathbb{R}$

4.

a) Enunciar el Teorema del valor intermedio. (2 Ptos)

b) Probar que existe un $c\in(3,4)$, tal que: $f(c)=g(c)$, donde $g(x)=x^3+1$ y $f(x)=4x^2-1$ (3 Ptos)

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 930 B

Nombre: ________________________________

Carnet: _______________ Sección: ______

1.

a) Sean f y g dos funciones tales que:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5 \quad y \quad \lim_{x\to 2} g(x) = -3$$

Hallar $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)g(x)}{f(x)+1}$, indicando las propiedades utilizadas.

Solución:

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)g(x)}{f(x)+1} = \frac{\lim_{x\to 2}\left(f(x)g(x)\right)}{\lim_{x\to 2}\left(f(x)+1\right)}$$

$$= \frac{\left(\lim_{x\to 2} f(x)\right)\left(\lim_{x\to 2} g(x)\right)}{\left(\lim_{x\to 2} f(x)\right)+1}$$

$$= \frac{5\,.\,(-3)}{5+1} = -\frac{5}{2}$$

b) Definir formalmente

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

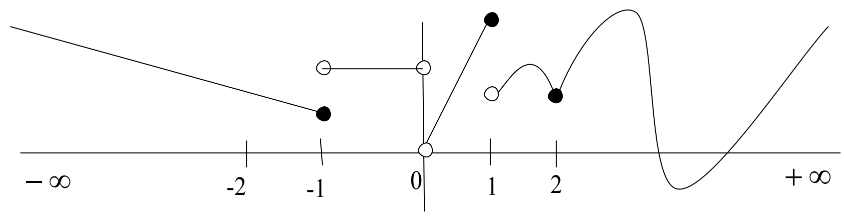
Solución:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, talque:$

$$0 < c - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

(1 Pto c/u)

c) Indicar los intervalos de continuidad, según la gráfica indicada a continuación



Solución:

La función es continua en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

d) Hallar $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2(x)}{x}$

Solución:

$$\frac{\tan^2(x)}{x} = \frac{sen^2(x)}{x\cos^2(x)} = \frac{sen(x)}{x} sen(x) \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Luego:

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 930 B

Nombre: ______________________________

Carnet: _______________ Sección: ______

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}sen(x)\frac{1}{\cos^2(x)}\right)$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}sen(x)\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2(x)}\right)$$

$$=1\ .\ 0\ .\ 1=0$$

e) Sabiendo que $|f(x)|<(x-3)^2$, para $x\neq 3$.

Hallar $\lim_{x\to 3}f(x)$

Solución:

$$|f(x)|<(x-3)^2 \Leftrightarrow -(x-3)^2<f(x)<(x-3)^2$$

Como $\lim_{x\to 3}\left(-(x-3)^2\right)=0=\lim_{x\to 3}(x-3)^2$, entonces por el teorema del emparedado

$$\lim_{x\to 3}f(x)=0$$

2. Hallar los siguientes limites:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\tan(x)}$ (3 Ptos)

Solución:

$$\frac{1-\cos(x)}{\tan(x)}=-\frac{1-\cos(x)}{\tan(x)}$$

$$=-\cos(x)\frac{(1-\cos(x))}{sen(x)}\frac{(1+\cos(x))}{(1+\cos(x))}$$

$$=-\cos(x)\frac{(1-\cos^2(x))}{sen(x)(1+\cos(x))}$$

$$=-\cos(x)\frac{sen^2(x)}{sen(x)(1+\cos(x))}$$

$$=-\cos(x)\frac{sen(x)}{(1+\cos(x))}$$

Luego:

b) $\lim_{x\to 2}\frac{sen(2-x)\sqrt{(2-x)^2}}{2-x}$ (3 Ptos)

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\frac{sen(2-x)\sqrt{(2-x)^2}}{2-x}$$

$$=\left(\lim_{x\to 2}\frac{sen(2-x)}{2-x}\right)\left(\lim_{x\to 1}\sqrt{(2-x)^2}\right)$$

$$=1\ .\ 0=0$$

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 930 B

Nombre: ____________________________

Carnet: _______________ Sección: ______

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\tan(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\cos(x)\frac{sen(x)}{(1+\cos(x))}\right)$$

$$= -\lim_{x\to 0}(\cos(x))\frac{\lim_{x\to 0} sen(x)}{\lim_{x\to 0}(1+\cos(x))}$$

$$= -1 \;.\; \frac{0}{2} = 0$$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{(h-2)^3-8}{h}$ (4 Ptos)

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(h-2)^3-8}{h} = \lim_{x\to 0}\left[\left((h-2)^3-8\right)\frac{1}{h}\right]$$

Como $\lim_{x\to 0}\left((h-2)^3-8\right) = -8$

Y $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{h}\right)$ no existe ya que

$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{h}\right) = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{h}\right) = +\infty$,

entonces: $\lim_{x\to 0^-}\frac{(h-2)^3-8}{h} = +\infty$

y $\lim_{x\to 0^+}\frac{(h-2)^3-8}{h} = -\infty$

y en conseuencia:

$\lim_{h\to 0}\frac{(h-2)^3-8}{h}$ no existe.

d) $\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}}{-4x-1}$ (4 Ptos)

Solución:

$$\frac{\sqrt{x^2+4x}}{-4x-1} = -\frac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1}$$

$$= -\frac{\left(\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x}\right)}{\left(\frac{4x+1}{x}\right)} = -\frac{\left(\sqrt{\frac{x^2+4x}{x^2}}\right)}{\left(\frac{4x+1}{x}\right)}$$

$$= -\frac{\left(\sqrt{1+4\frac{1}{x}}\right)}{\left(4+\frac{1}{x}\right)}$$

Luego:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}}{-4x-1} = \lim_{x\to -\infty} -\frac{\left(\sqrt{1+4\frac{1}{x}}\right)}{\left(4+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= -\frac{1}{4}$$

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 930 B

Nombre: ______________________________

Carnet: ______________ Sección: ______

3. Dada la función g definida por: $g(x)=\begin{cases} x+b & si \quad x<2 \\ x^2-3x+1 & si \quad 2\le x<4 \\ \dfrac{x+1-a}{x-2} & si \quad x\ge 4 \end{cases}$

Hallar los valores de a y b para que g sea continua en todo $\mathbb{R}$

Solución:

3.1.- f es continua en $(-\infty,2)$, ya que es un polinomio.
f es continua en $(2,4)$, ya que es un polinomio.
f es continua en $(4,+\infty)$, ya que es una función racional.

3.2.- Continuidad en $x=2$, $\left(\underset{x\to 2}{Lim}\, g(x)=g(2)\right)$

3.2.1.- $g(2)=2^2-3\,.\,2+1=-1$

3.2.2.- $\underset{x\to 2}{Lim}\, g(x)$

$\underset{x\to 2^-}{Lim}\ g(x)=\underset{x\to 2^-}{Lim}\ (x+b)=2+b$

y $\underset{x\to 2^+}{Lim}\ g(x)=\underset{x\to 2^+}{Lim}\ (x^2-3x+1)=-1$,

Luego el limite existe si se satisface: $2+b=-1 \Leftrightarrow b=-3$ (6 Ptos)

Por lo tanto g es continua en $x=2$, si se satisface: $b=-3$

3.3.- Continuidad en $x=4$, $\left(\underset{x\to 4}{Lim}\, g(x)=g(4)\right)$

3.3.1.- $g(4)=\dfrac{4+1-a}{4-2}=\dfrac{5-a}{2}$

3.3.2.- $\underset{x\to 4}{Lim}\, g(x)$

$\underset{x\to 4^-}{Lim}\ g(x)=\underset{x\to 4^-}{Lim}\ (x^2-3x+1)=5$

y $\underset{x\to 4^+}{Lim}\ g(x)=\underset{x\to 4^+}{Lim}\left(\dfrac{x+1-b}{x-2}\right)=\dfrac{5-a}{2}$

Luego el limite existe si se satisface: $5=\dfrac{5-a}{2} \Leftrightarrow a=-5$

Por lo tanto g es continua en $x=4$, si se satisface: $a=-5$

g es continua en todo $\mathbb{R}$, si se toman los valores $a=-5$ y $b=-3$

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 930 B

Nombre: ______________________________

Carnet: ______________ Sección: ______

4.

a) Enunciar el Teorema del valor intermedio.
Solución:
Sea h una función continua en el intervalo $[a,b]$ y sea un w un valor entre $h(a)$ y $h(b)$, entonces existe un $c \in (a,b)$, talque: $h(c) = w$ (2 Ptos)

b) Probar que existe un $c \in (3,4)$, tal que: $f(c) = g(c)$, donde $g(x) = x^3 + 1$ y $f(x) = 4x^2 - 1$
Solución:
Considere $h(x) = g(x) - f(x)$ (3 Ptos)
$g(3) = 28$, $g(4) = 65$, $f(3) = 35$, $f(4) = 63$ $\Rightarrow$ $h(3) = -7$, $h(4) = 2$,
como $h(3) < 0 < h(4)$ y la función h es continua en $[3,4]$, se puede aplicar el teorema del valor intermedios y en consecuencia, existe un $c \in (3,4)$, talque: $h(c) = 0$, lo que es equivalente a decir: existe un $c \in (3,4)$, talque: $f(c) = g(c)$

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado